数理解析研究所講究録
897 巻 1995 年 117-125

Application of game theory to maximum entropy principle

新潟大学理学部　明石重男（Shigeo Akashi）

1. 序文

熱力学及び統計力学の領域から誕生したエントロピーの概念は，C. E. Shannonにより通信工学の領域に導入されて以来「不確定さを測定する手法」を与えるものとして自然科学はもとより，社会科学に到る諸領域で研究対象となっている．通信工学や情報理論の領域に於けるエントロピーの概念は，通信システムの伝送効率評価を与える道具となっているが，一般に確率測度及び通信路の関数として計算されるエントロピー関数は非線形性を有するため，非線形解析学に数学的基礎を置くゲーム理論的手法が有用視されてきている．この手法は，「エントロピー関数を極大もしくは極小にする様な戦略を選択手段として決定する」という最大エントロピー原理の考え方に対して具体的選択決定手順を提供するものとして注目される．本稿では定常通信路族の伝送容量評価に対するmin-max定理の応用について説明する．

2．記号力学系

$\mathbb{N}$を自然数の集合，$\mathbb{R}$を実数の集合，$\mathbb{Z}$を整数の集合とする．Aをℓ個の記号の集合とし，その要素をa_1，a_2，--- a_ℓで表わす．$A^{\mathbb{Z}}$をa_1からa_ℓを要素とする両側無限記号列の集合とし，その要素を$\prod_{k\in\mathbb{Z}} x_k$で表わす．（以下，簡略化のため，$\prod x_k$と記すことにする．$s$及び$t$を$s \leqq t$を満たす任意の整数とした時，

$$[x_s^\circ, \cdots x_t^\circ] \triangleq \{\prod x_k \,;\, x_k = x_k^\circ,\ s \leqq k \leqq t\}$$

で定義される$A^{\mathbb{Z}}$の部分集合をメッセージと呼ぶ．Aは有限集合であるから，離散位相を導入することによりコンパクトHausdorff空間となる．従ってTychonoff積位相を導入することにより$A^{\mathbb{Z}}$もコンパクトHausdorff空間となる．この様にして$A^{\mathbb{Z}}$に導入された位相をτで表わす．

今，$(A^{\mathbb{Z}}, \tau)$上で定義され$(A^{\mathbb{Z}}, \tau)$に値を取る変換Tが，

$$T : \prod x_k \longmapsto \prod y_k,\quad x_{k+1} = y_k,\quad k \in \mathbb{Z}$$

を満たす時，Tを推移変換と呼ぶ．更に，三つ組$(A^{\mathbb{Z}}, \tau, T)$を記号力学系と呼ぶ．

3．記号力学系上の確率測度族

$\mathfrak{F}$を前述の位相τにより構成されるBorel σ-集合体として可測空間$(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F})$を構成する．$\mathcal{P}(A^{\mathbb{Z}})$で$(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F})$上の確率測度の集合とする．$\mathcal{P}(A^{\mathbb{Z}}) \neq \phi$が成り立つことはDirac測度の存

存より明らかである．Riesz-Markovの定理により，$\mathcal{P}(A^{\mathbb{Z}})$ は$A^{\mathbb{Z}}$上の連続関数の集合 $C(A^{\mathbb{Z}})$ の共役空間に埋め込み可能であり，この共役空間に導入される弱＊位相によりコンパクト集合となる．μを$\mathcal{P}(A^{\mathbb{Z}})$ の要素とした時，

$$(\mu\circ T^{-1})(F)=\mu(T^{-1}F)=\mu(F), \qquad F\in\mathcal{F}$$

が成立するならば，μを定常であるという．$\mathcal{P}_T(A^{\mathbb{Z}})$ を$\mathcal{P}(A^{\mathbb{Z}})$の要素で定常であるものの全体とする．$\mathcal{P}_T(A^{\mathbb{Z}})\neq\phi$ が成り立つことは，μから$\mu\circ T^{-1}$ への対応がアフィン変換となること及びKakutani-Markov の不動点定理を用いて示される．

4．定常確率測度族上のエントロピー

nを任意の自然数とした時，M_n を時点０から時点$n-1$迄のメッセージの集合，即ち，

$$M_n \triangleq \{[x_0,\cdots,x_{n-1}];\ x_k\in A,\ 0\leqq k\leqq n-1\}$$

と定める．今，$\mu\in\mathcal{P}_T(A^{\mathbb{Z}})$を任意に選んだ時，

$$S_\mu(M_n)=-\sum\mu([x_0,\cdots,x_{n-1}])\log\mu([x_0,\cdots,x_{n-1}])$$

で定義される関数を，時点０から時点nまでのμの(Shannon)エントロピーと呼ぶ．但し，ここで総和は，全てのM_nの要素に渡って計算されるものとする．更に，上式を用いて，

$$S(\mu)=\lim_{n\to\infty}S_\mu(M_n)/n$$

として定義される関数$S(\mu)$をμの単位時間あたりのエントロピーと呼ぶ．上式の極限値の存在は，任意の自然数m，nに

対して，$S_{\mu}(M_{m+n}) \leqq S_{\mu}(M_m) + S_{\mu}(M_n)$ が成り立つことより示される．結果として上記極限値は，$\inf\{S_{\mu}(M_n)/n ; n \geqq 1\}$ 一致する．$S(\mu)$はアフィン性を有する．即ち，任意の定常確率測度μ_1，μ_2及び，$\alpha_1+\alpha_2=1$を満たす任意の非負実数α_1，α_2に対して，

$$S(\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2)=\alpha_1 S(\mu_1)+\alpha_2 S(\mu_2)$$

が成り立つ．

5．確率測度の変換としての通信路

$A^{\mathbb{Z}}\times\mathfrak{F}$上で定義され，閉区間$[0,1]$に値を取る関数$\nu$は，

(1)．$\nu(\Pi x_k, \cdot) \in \mathcal{P}(A^{\mathbb{Z}})$，　　$\Pi x_k \in A^{\mathbb{Z}}$

(2)．$\nu(\cdot, F)$：$(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F})$上の可測関数，　　$F \in \mathfrak{F}$

という2条件を満たす時，$(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F})$上の通信路と呼ばれる．更に通信路$\nu$が

$$\nu(T(\Pi x_k), TF)=\nu(\Pi x_k, F), \qquad \Pi x_k \in A^{\mathbb{Z}},\ F \in \mathfrak{F}$$

を満たす時，定常通信路と呼ばれる．通信路νを積分核として用いることにより，$(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F})$上の確率測度の変換を構成することが可能となる．即ち，μを$\mathcal{P}(A^{\mathbb{Z}})$の任意の要素とした時，

$$\mu'(G)=\int_{A^{\mathbb{Z}}}\nu(\Pi x_k, G)\,d\mu(\Pi x_k), \qquad G \in \mathfrak{F}$$

として定義される確率測度μ'を，入力確率測度μを通信路νを用い変換して得られる出力確率測度と呼び，更に，

$$\mu''(F\times G)=\int_F \nu(\pi x_k, G)\,d\mu(\pi x_k), \qquad F, G\in\mathfrak{F}$$

として定義される確率測度μ''を，入力確率測度μと通信路νとから構成される同時確率測度と呼ぶ．μ及びμ'は$(A^Z, \mathfrak{F})$上の確率測度であり，μ''は直積可測空間$(A^Z\times A^Z, \mathfrak{F}\times\mathfrak{F})$上の確率測度を定める．一方，$\mu$が定常確率測度，$\nu$が定常通信路である時，$\mu'$及び$\mu''$は共に定常確率測度となるため単位時間あたりのエントロピーを計算することが可能となる．従って，$S(\mu)$，$S(\mu')$及び$S(\mu'')$を用いて

$$I(\mu;\nu)\triangleq S(\mu)+S(\mu')-S(\mu'')$$

として定義される関数を，入力確率測度μを通信路νを用いて伝送した場合の伝送速度もしくは単位時間あたりの相互エントロピーと呼ぶ．伝送速度は，入力確率測度及び通信路の双方に関してアフィン性を有することが知られている．即ちα_1及びα_2を，$\alpha_1+\alpha_2=1$を満足する任意の非負実数とした時，

$$I(\alpha_1\mu_1+\alpha_2\mu_2;\nu)=\alpha_1 I(\mu_1,\nu)+\alpha_2 I(\mu_2,\nu),$$

$$I(\mu,\alpha_1\nu_1+\alpha_2\nu_2)=\alpha_1 I(\mu,\nu_1)+\alpha_2 I(\mu,\nu_2),$$

が，任意の定常確率測度μ_1，μ_2及び任意の定常通信路ν_1，ν_2に対して成り立つ．

6. 記号力学系上の通信路の伝送速度容量

今迄に述べてきた通信路の概念は，一般の可測空間上の確

率測度から確率測度への変換として定義可能であり，伝送速度の計算を除いては，記号力学系から構成される可測空間上に制限する必要は存在しない．しかし，以下に述べる定常通信路の有限記憶性及び有限歩従属性は，通信路の定義されている空間が本質的に記号力学系から構成される可測空間であることを要求する．即ち，$A^{\mathbb{Z}}$上の定常通信路νが長さmの有限記憶を持つとは，任意のΠx_k, $\Pi y_k \in A^{\mathbb{Z}}$及び任意のメッセージ$[z_i, \cdots z_j]$に対して，

$$x_k = y_k, \quad i-m \leqq k \leqq j$$
$$\Rightarrow \nu(\Pi x_k, [z_i, \cdots z_j]) = \nu(\Pi y_k, [z_i, \cdots z_j])$$

が成り立つ場合を言い，又，m歩従属であると言うのは，$q \leqq r \leqq s \leqq t$を満たす整数$q, r, s, t$に対して，

$$s-r > m \Rightarrow \nu(\Pi x_k, [y_q \cdots y_r] \cap [z_s \cdots z_t])$$
$$= \nu(\Pi x_k, [y_q \cdots y_r])\,\nu(\Pi x_k, [z_s \cdots z_t])$$

を満足する場合を言う．

νを定常通信路とした時，

$$C(\nu) \triangleq \sup\{I(\mu;\nu);\ \mu \in \mathcal{P}_T(A^{\mathbb{Z}})\}$$

で定義される量$C(\nu)$をνの定常伝送容量という．又，$\mathcal{N}$を定常通信路の集合とした時，

$$C(\mathcal{N}) \triangleq \sup\{\inf\{I(\mu;\nu);\ \nu \in \mathcal{N}\};\ \mu \in \mathcal{P}_T(A^{\mathbb{Z}})\}$$

で定義される量$C(\mathcal{N})$を定常通信路族$\mathcal{N}$の定常伝送容量という．

7．定常伝送容量の評価

伝送速度は定常確率測度族と定常通信路族の直積集合上で定義された非負実数に値を取る関数であるが，通信路νを固定した時，$\mathcal{P}_T(A^Z)$を定義域とする関数とみなすことができる．この時，次の結果が知られている．

定理（Breimanの定理）

定常通信路νが有限記憶を持ち，かつ有限歩従属であれば$I(\cdot;\nu)$は$\mathcal{P}_T(A^Z)$上の上半連続関数となる．

一般に定常伝送容量を求める作業は困難であり又全ての通信路に対して正確な値を計算する方法は存在しない．また我々が用いる通信路も唯一つとは限らないため，複数個の通信路を有する伝送システムの信頼性評価のために通信路族の伝送容量の値を要求されることもある．この様な場合，上からもしくは下からの評価を与えることが重要な問題となってくるが，下からの評価を与える命題として次の結果を示すことが可能である．以下$\mathfrak{N}$を有限記憶，有限歩従属通信路族とする．

命題（通信路族の伝送容量の下界評価）

$\mathfrak{N}$を上記通信路族とした時，適当な実数Cに対して，任意の$\nu\in\mathfrak{N}$に対して，ある$\mu\in\mathcal{P}_T(A^Z)$が存在して$I(\mu;\nu)\geqq C$が成り立つという条件を満足するものとする．この時，$C(\mathfrak{N})\geqq C$が成り立つ．

証明．Breimanの定理により，任意の$\nu\in\mathcal{N}$に対して$I(\cdot,\nu)$は上半連続関数となる．またアフィン性が成立していることから min-max定理が適用可能で，

$$\inf\{\sup\{I(\mu;\nu);\mu\in\mathcal{P}_T(A^{\mathbb{Z}})\};\nu\in\mathcal{N}\}$$
$$=\sup\{\inf\{I(\mu;\nu);\nu\in\mathcal{N}\};\mu\in\mathcal{P}_T(A^{\mathbb{Z}})\}=C(\mathcal{N})$$

が成り立つ．また上式左辺は

$$C\leqq\inf\{\sup\{I(\mu;\nu);\mu\in\mathcal{P}_T(A^{\mathbb{Z}})\};\nu\in\mathcal{N}\}$$

が成立することより明らか．

註．$\mathcal{P}_T(A^{\mathbb{Z}})$のコンパクト性及び伝送速度の上半連続性により，伝送容量を定義する際用いたsupはmaxで置き換え可能である．

以上，定常通信路の伝送容量計算に対するmin-max定理の応用を述べてきたが，Breimanの定理及び伝送容量に関しては，［2］が詳しい．またゲーム理論に於ける種々の有用な概念の解説としては［1］を参照されたい．非線形解析学的手法の数々を提供するものとして［3］がある．尚，有限次元空間に関する最適化問題を扱う具体的アルゴリズムを提供するものとして［4］が適している．

参考文献

[1]. 鈴木光男, ゲーム理論入門, 勁草書房, 1982年.

[2]. 梅垣寿春, 大矢雅則, 確率論的エントロピー,
共立出版, 1983年

[3]. 高橋渉, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1989年.

[4]. 田中謙輔, 凸解析と最適化理論, 数理情報科学シリーズ5, 牧野書店, 1994年.